Travaux dirigés série n°I : Solide en mouvement, cinématique

Exercice 1 : Pièce roulant sur un plan

Une pièce verticale, de centre C et de rayon *b*, roule sans glisser sur une table horizontale à la vitesse angulaire ω.

a) Déterminer le vecteur instantané de rotation de ce solide.

b) Soit C le centre de la pièce. En supposant que la pièce roule sans glisser, déterminer la relation entre la vitesse v_C de C et la vitesse angulaire ω.

c) Soit M un point de la pièce tel que CM = *b*. En supposant que la vitesse angulaire est constante tracer la norme de la vitesse de M en fonction du temps.

Exercice 2 : Échelle

Une échelle, assimilée à une barre de longueur 2*l*, glisse en restant en contact à la fois avec le sol horizontal et un mur vertical. Soit C le centre de la barre et O le point d'intersection du sol et du mur dans le plan de la barre.

– Montrer que OC = *l.*

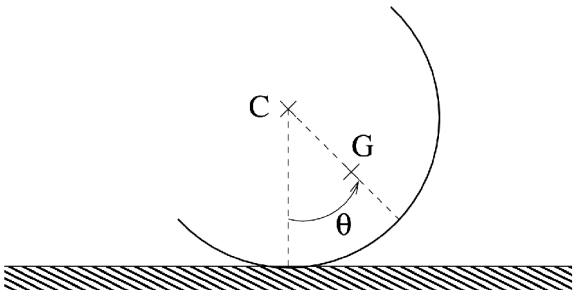
– Déterminer le vecteur instantané de rotation de l'échelle en fonction de l'angle α de l'échelle avec l'horizontale *[et sa dérivée temporelle].*

Exercice 3 : Gouttière demi-cylindrique

Une gouttière homogène, en forme de demi-cylindre creux, de rayon *b*, de masse *m*, roule sans glisser sur un plan horizontal. La ligne de contact entre la gouttière et le plan est forcément une droite parallèle à l'axe de la gouttière. Soit C le centre du cylindre complet correspondant au demi-cylindre de la gouttière. Soit G le centre de gravité de la gouttière et θ l'angle entre la verticale et $\overrightarrow{CG}$.

a) Montrer la distance CG vaut $2b/\pi$.

b) Exprimer la vitesse de C *[en fonction de θ et sa dérivée temporelle].*



Exercice 4 : Cinématique d'un cerceau sur un cylindre

Un cerceau vertical, de centre C, de rayon *b* et de masse *m*, roule sans glisser sur un cylindre fixe d'axe horizontal et de rayon *R*, (*R* > *b*). En fonction d'une variable de position du cerceau que l'on choisira et de ses dérivées temporelles, exprimer dans un référentiel lié au sol :

a) les vecteurs vitesse et accélération du point C,

b) le vecteur rotation instantané du cerceau,

c) le moment cinétique du cerceau en O point d'intersection entre le plan du cerceau et l'axe du cylindre,

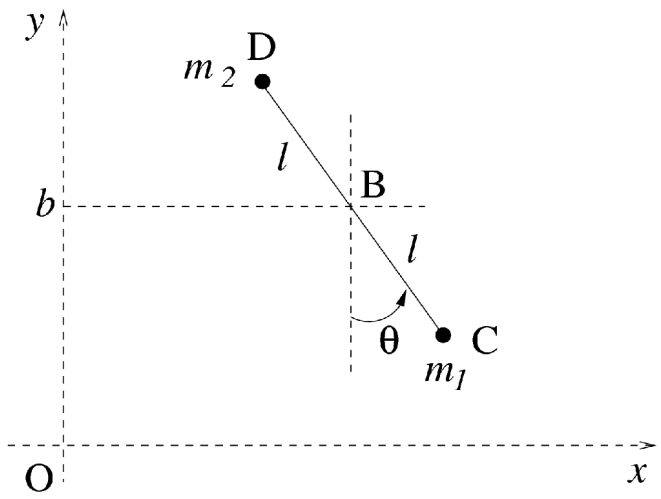
d) l'énergie cinétique du cerceau.

Exercice 5 : *(Contrôle, octobre 2008)*

Une voiture se déplace rectilignement dans la direction (O*x*) avec une accélération $\gamma = \alpha t$. α est une constante positive, *t* est le temps. Initialement *(à t* = 0), la voiture à la vitesse v_0 et un point B, fixe dans la voiture, est en (*0,b,0*) dans le référentiel (*R*(O,x,y,z)) lié au sol.

Une tige CD, de longueur 2*l* et de masse négligeable, est fixée en B, milieu de CD, sur un axe fixe de la voiture. La tige CD tourne dans le plan (O,*x,y*) autour du son centre B à la vitesse angulaire ω_0 constante. Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 ($m_1 = m_2 = m$) sont fixées à la tige CD en C et D, respectivement.

1) Déterminer, dans le référentiel du sol (*R*(O,x,y,z)) et dans le référentiel barycentrique des deux masses, les quantités suivantes :
   a) Vitesse et accélération du point C.
   b) Moment cinétique au point B et au point O du solide composé de la tige CD et des deux masses.
2) Le système {m_1, m_2, tige CD} est remplacé par une barre de masse *M = 2m* homogène de même longueur. Déterminer le moment cinétique de la barre par rapport à O dans le référentiel (*R* (O,x,y,z)).



<u>Exercice complémentaire :</u>

Exercice 6 : Changement de référentiel

Un référentiel (R'(0',x',y',z')) est en mouvement par rapport au référentiel (R(0,x,y,z)). Soient :

- $\vec{v}(O')$ et $\vec{a}(O')$ la vitesse et l'accélération de 0' dans (R),
- $\vec{\Omega}$ vecteur rotation instantané de (R') rapport à (R).

On peut montrer que : quelque soit $\vec{u'}$, vecteur unitaire fixe[1] dans (R'), sa dérivée temporelle dans (R) est : $\left(\frac{d}{dt}\vec{u'}\right)_R = \vec{\Omega}\wedge\vec{u'}$.

a) Montrer que quelque soit le vecteur $\vec{A}(t)$, la dérivée temporelle de $\vec{A}$ dans (R) et la dérivée de $\vec{A}(t)$ dans (R') sont reliées par la relations : $\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{A}$.

b) Montrer que la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ d'un point M dans (R) s'écrivent en fonction de la vitesse $\vec{v'}$ et l'accélération $\vec{a'}$ de M dans (R') :

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}(O') + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}(O') + \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\right)\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v'}$$

1 C'est à dire $\vec{u'}$ indépendant du temps dans le référentiel (R').